ARCHIVES DE L'INSTITUT INTERNATIONAL DES SCIENCES THÉORIQUES

23

COLLOQUE
DE L'ACADÉMIE INTERNATIONALE
DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

17-21 avril 1979

ORBETELLO

UN SIÈCLE DANS LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

OFFICE INTERNATIONAL DE LIBRAIRIE
Avenue Marnix, 30, 1050 Bruxelles

1981

Amer. Math. Soc. 76 (1970), pp. 301-323.

[12] van Heijenoorth, J. *From Frege to Gödel. A Source Book of Mathematical Logic,* 1897-1931, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1967.

Anno IV N. 1
Gennaio-Giugno 1981

Volume 4 N. 1
January-June 1981

EPISTEMOLOGIA

Rivista italiana di Filosofia della Scienza
An Italian Journal for the Philosophy of Science

*UN SIECLE
DANS LA PHILOSOPHIE
DES MATHEMATIQUES*

*ONE CENTURY
IN THE PHILOSOPHY
OF MATHEMATICS*

Agazzi - Destouches - Dieudonné - Février
Freguglia - Körner - Ladrière - Lorenzen
Manara - Mangione - Mercier - Müller - Penco
Smiley - Thiel - Thom - Tonini

TILGHER-GENOVA

Carlo Felice Manara

FEDERIGO ENRIQUES ET DAVID HILBERT

1. La tâche de présenter et d'analyser, même sommairement, les figures de deux mathématiciens tels que Federigo Enriques et David Hilbert, paraît bien difficile, mais séduisante aussi. Difficile par l'envergure des personnalités complexes des protagonistes, qui ont laissé une marque indélébile dans la science et les mathématiques en particulier; séduisante, parce qu'ils constituent, d'une certaine façon, la réalisation d'un phénomène historique qui avait été déjà observé par L.N.M. Carnot; celui-ci, dans sa *Géométrie de position*, a observé qu'il existe certains moments dans le développement de l'histoire de la science (et les mathématiques ne font point exception) où les découvertes sont, pour ainsi dire, "dans l'air" et se font souvent presque simultanément dans des lieux très éloignés les uns des autres, par des personnes d'extraction culturelle et de traditions fort différentes, à travers une sorte d'existence presque autonome de la pensée qui se présente, extérieurement, comme indépendante des personnes qui la développent et l'élaborent.

Nous savons que cette apparence est fallacieuse et que le développement de la science ne peut se passer de génies et de personnes brillantes, mais il est de même certain que souvent les fameuses découvertes des grands sont précédées de petites intuitions de la part des précurseurs, de tentatives qui semblent aller étrangement dans la même direction qui sera prise ensuite par ceux-ci, d'une sorte de maturation ou de fermentation vitale qui reste en géné-

Epistemologia IV (1981), pp. 189-204.

ral inconnue à la plupart, mais qui semble préparer la découverte géniale.

Nous n'avons point l'intention d'approfondir cette question, à propos de laquelle les discussions pourraient devenir longues et peut-être même peu utiles à nos fins.

Il peut être intéressant toutefois d'observer que les deux grands personnages que nous étudions aujourd'hui, peuvent être considérés comme les représentants typiques de leur époque et à la fois comme les précurseurs des futurs développements de la mathématique; et selon la première perspective, leur œuvre se présente comme une sorte de synthèse et de conclusion de l'évolution des mathématiques du 19e siècle.

Pour illustrer ces considérations, nous désirerions faire une analyse sommaire du développement des mathématiques au siècle dernier, parce que nous estimons que cette brève analyse est utile, pour ne pas dire nécessaire, afin de bien comprendre la stature des personnages, l'importance des réponses qu'ils ont données aux questions ouvertes, la signification des théories qu'ils ont échaffaudées et des problèmes qu'ils ont posés.

Dans la présentation scolaire habituelle des mathématiques supérieures, les noms des grands mathématiciens du 19e siècle sont liés principalment (de façon plus ou moins légitime) à une idée qui apparaît dominante: l'introduction de la "rigueur" dans les mathématiques et en particulier dans l'analyse mathématique. En conséquence, les noms des grands, tels que K.F. Gauss, A. Cauchy, B. Riemann, N. Abel, K. Weierstrass, G. Cantor et bien d'autres, sont cités dans la majeure partie de cas en relation à certaines thèses qui, avant eux, étaient acceptées comme basées sur l'"intuition", ou en relation à la précision de certains concepts qui étaient utilisés tout d'abord de façon peu précise et qui, par conséquent, avaient pu donner lieu à des paradoxes ou même à des paralogismes. Nous voulons dire que cette vision, étroitement liée à une certaine conception de la rigueur mathématique, risque de donner une idée seulement partielle de l'évolution des mathématiques et surtout de laisser dans l'ombre l'énorme travail d'invention et de création qui a été fait par les mathématiciens de cette période (avec, bien entendu, l'activité de critique et de précision) et qui a donné aux mathématiques de la fin du siècle un rangement tout différent de celui qu'elles avaient au début du siècle même.

En conséquence, nous voudrions rappeler, à côté des progrès de l'analyse mathématique, égalément l'évolution de l'algèbre et surtout le changement grandiose de perspective qui s'est vérifié dans le domaine de la géométrie.

Tout d'abord, pour ce qui concerne l'algèbre, nous désirerions rappeler qu'au cours du 19e siècle l'illustration géométrique des nombres complexes a été conquise et aussi par conséquent la légitimité des opérations de calculs sur ces opérateurs; le domaine des complexes est devenu ainsi celui où une grande partie de la théorie classique des équations algébriques évoluera et par la suite, grâce à A. Cauchy et à K. Weierstrass, également le champ fondamental pour différents chapitres de l'analyse mathématique qui dépendent fondamentalement de la théorie des fonctions de variable complexe. Mais à notre avis, l'aspect le plus intéressant de l'évolution de l'algèbre au cours du siècle dernier est constitué par la naissance de la théorie des groupes et par l'application de cette théorie aux équations algébriques, grâce à E. Galois, et à la classification des différentes géométries, grâce à F. Klein principalement.'

A ce propos, nous voudrions rappeler également que l'acceptation de structures non commutatives peut être considérée comme le germe de l'évolution des mathématiques vers le rangement actuel, avec un changement de perspective qui faisait déchoir, d'une certaine façon, l'importance des "contenus" et des propriétés en un certain sens "objectives" des opérateurs étudiés pour mettre au premier plan les propriétés formelles des opérations et les structures logiques sous-jacentes. Il nous semble aussi que l'invention de l'algèbre de Boole a une signification analogue; en effet, on accepte dans celle-ci, d'une part l'existence d'une algèbre ayant des propriétés et des règles nouvelles et "étranges", c'est-à-dire l'existence de règles qui ne s'adaptent point aux contenus traditionnels (nombres réels et complexes) et qui ne tirent pas leur origine des propriétés de ceux-ci; d'autre part se confirme le fait que l'objet de la mathématique n'est point seulement la "quantité", le "quantifiable", ainsi qu'on l'estimait selon la conception traditionnelle qui était en vigueur au début du siècle.

En ce qui concerne l'évolution de l'analyse mathématique durant le 19e siècle, nous voudrions nous limiter à rappeler (au milieu de la masse imposante de résultats et de théories fondamentales) deux points fondamentaux qui nous semblent d'un intérêt particulier pour nos fins: le premier concerne la théorie des fonctions de variable complexe, le second est celui qui concerne les problèmes du continu.

Il est bien connu qu'avec la théorie des fonctions de variable complexe, on arriva finalement à placer dans leur juste dimension plusieurs problèmes de la mathématique classique, problèmes que celle-ci n'avait pu résoudre par manque d'instruments adéquats; en outre, la théorie des fonction de variable complexe constitue, pour ainsi dire, le milieu naturel dans lequel le concept de courbe ou de surface algébrique trouve une généralité et une fécondité maximale. Et justement dans ce domaine, cultivé avec un génie et une profondité tout particuliers, F. Enriques laissa des traces ineffaçables de son génie.

De leur part, les problèmes du continu constituent, d'une certaine manière, le milieu naturel de l'analyse mathématique classique; nous voudrions dire aussi que de tels problèmes n'ont pas été causés, mais certainement accentués par le parallélisme de problématiques entre le milieu géométrique et le milieu plus strictement analytique qui a sa racine dans l'invention de la géométrie analytique.

Nous avons déjà fait allusion aux résultats de clarification et de précision de certains concepts, tels que la "répétition indéfinie" d'une opération ou l'"approximation indéfinie" d'une valeur numérique déterminée, que les classiques attribuaient à celle que l'on a l'habitude d'appeler l'"intuition géométrique". Nous ne pensons pas qu'il y ait lieu d'approfondir l'analyse d'une expression comme celle-ci, qui semble assez claire à première vue, mais qui, à un examen ultérieur, présente des ombres importantes. Cependant nous ne voulons point abandonner l'argument, même provisoirement, sans présenter quelques observations que nous ne considérons point inutiles, même si elles sont assez évidentes. En effet, il vaut la peine de rappeler que l'idée de continuité enfonce ses racines dans la perception directe d'une certaine réalité expérimentale, mais aussi qu'elle n'exclut point une nouvelle élaboration fantastique des expériences sensibles par l'imagination; ce qui peut provoquer des déformations, des extrapolations, des intégrations inconscientes d'expériences dues à divers milieux perceptifs. Nous pouvons dire en outre, que ce stade de l'élaboration fantastique des perceptions nous semble précéder le moment où survient la précision des concepts, à travers les instruments logiques et linguistiques; instruments qui peuvent appartenir au milieu de la langue commune, ou aux milieux des langues conventionnelles et formalisées de l'algèbre, de l'analyse mathématique, ou même à d'autres milieux de la mathématique générale. Il est enfin presque inutile d'ajouter que ces considérations qui concernent les rapports entre l'expérience sensible et son élaboration de la part de l'imagination, nous semblent applicables non seulement au problème particulier du continu, mais aussi à une problématique bien plus générale qui concerne en particulier le fondement et la signification de la géométrie et, de façon plus générale encore, à tous les procédés de mathématisation de la réalité physique.

Nous n'avons point l'intention d'approfondir ici les discussions qui concernent les relations entre les mathématiques et la réalité concrète, physique et sociale; nous ne voudrions toutefois point passer sous silence, le fait que les discussions de ce genre ont pris parfois, au cours du 19e siècle, un aspect particulier dû aux crises sociales causées par la Révolution Française et par ses conséquences, et en rapport avec les problèmes politiques, sociaux et économiques posés par la première industrialisation des Pays européens. Il y a eu ainsi des discussions et des divisions entre les mathématiciens, dont une grande partie a défendu l'autonomie complète des mathématiques face aux problèmes pratiques. Une autonomie qui ne signifie toutefois point un détachement total, mais qui revendique simplement l'indépendence des mathématiques dans la recherche des propres sources d'inspiration et la liberté de consacrer les forces des mathématiciens aux problèmes qui les intéressent le plus intellectuellement; et ceci, indépendamment de la possibilité d'éventuelles applications pratiques des résultats qui s'obtiennent.

Soit dit en passant, nous partageons entièrement cette position et nous estimons, entre autre, que l'histoire de la science démontre abondamment que souvent certains concepts, considérés comme purement théoriques et jugés "abstraits" parce qu'élaborés par les mathématiciens en vue d'intérêts purement intellectuels et détachés de tout intérêt pratique, sont devenus par la suite des instruments fondamentaux pour les théories physiques et pour les applications techniques de très grande importance; et ceci, après des laps de temps parfois étonnamment courts. Ainsi l'exemple de la théorie des fonctions de variable complexe, jugée complètement abstraite à l'époque de sa naissance, et qui est aujourd'hui un instrument fondamental pour de nombreux chapitres de la physique mathématique; de même, l'exemple de la géométrie différentielle et du calcul tensoriel, nés en tant que chapitres de mathématique complètement détachés de la réalité, et qui sont devenus par la suite les instruments fondamentaux de la relativité restreinte et générale.

Dans cet ordre d'idées, et en relation avec les rapports entre la réalité sensible et la mathématique, il semble que nous puissions dire que les problèmes de la géométrie et de ses fondements tiennent une place particulière; nous déclarons cela, parce que nous pensons que la géométrie a été une des premières doctrines avec laquelle on a tenté la mathématisation de la réalité expérimentale. Nous croyons en effet que la géométrie euclidienne classique, telle que nous la connaissons, constitue le premier pas vers la rationalisation de nos expériences de manipulation des corps rigides; rationalisation qui, dans la position euclidienne, consiste dans la recherche de propositions considérées évidentes (c'est-à-dire acceptables directement à partir de leur contenu) et dans la déduction de propositions ultérieures grâce aux moyens de la logique.

Il semble que nous puissions dire que, justement, l'évolution de la géométrie durant le 19e siècle a été l'occasion et même, d'une certaine façon, le paradigme de l'évolution que la mathématique a eue durant cette période, et qui l'a amenée au rangement actuel, ou du moins, au rangement qu'elle avait avant la venue massive des moyens de calcul électronique.

En vérité, la géométrie était encore considérée, au début du siècle, comme une science déterminée par son objet, qui était spécifié chaque fois au moyen d'expressions telles que "la quantité continue" ou "l'espace géométrique" ou autres expréssions congénères. La naissance des géométries non-euclidiennes, l'acquise certitude de leur consistance logique, la naissance des autres "géométries-non" (non desarguésienne, non pascalienne etc.), l'invention de la géométrie projective et de la géométrie des hyperspaces provoquèrent une grave et salutaire crise de toute la mathématique et obligèrent les mathématiciens à changer radicalement leur façon de concevoir et de considérer cette science qui acquérait ainsi, à la fin du siècle, le statut de "système hypothético-déductif".

Une image suggestive de cette évolution peut s'obtenir en méditant sur les phrases qui sont au début de deux traités de géométrie qui, à juste titre, peuvent être considérés classiques: les *Elements* d'Euclide et les *Fondements* (*Die Grundlagen der Geometrie*) de Hilbert. Euclide commence en disant:

> Le point est ce qui n'a pas de partie

Hilbert débute ainsi:

> Nous concevons trois systèmes de choses

et dans ce renoncement à définir les "choses" dont on parle, se trouve également la signification et le résultat d'un siècle d'analyses et de critique.

On affirme aujourd'hui que la géométrie, comme branche de la mathématique, n'existe plus et qu'elle a réduit ses tâches à fournir un langage pratique et de puissantes suggestions aux autres branches de la science. Mais le labeur critique, qui est à l'origine de cette dissolution, a porté ses fruits dans toute la mathématique et dans toutes les autres sciences qui utilisent le langage et la méthode des mathématiques.

Nous pourrions dire par conséquent, dans cet ordre d'idées, que la mathématique a initié sa propre évolution par la recherche de la rigueur dans l'analyse mathématique, et a suivi par la suite sa propre voie jusqu'au point de se trouver, à la fin du 19e siècle, étudiant les fondements de l'arithmétique et de la géométrie et se posant des questions sur les fondements mêmes de la logique et du raisonnement humain.

2. L'aperçu que nous avons donné sur l'évolution de la mathématique durant le 19e siècle, quoique bref et sommaire sous plusieurs aspects, explique toutefois comment bien des mathématiciens de grande envergure, en particulier les deux que nous sommes en train de considérer, ont été amenés, par le climat même et la situation de la science à cette époque, à rendre témoignage de la validité de la pensée de Carnot que nous avons rappelé; et en particulier, comment ils furent conduits à s'occuper des fondements de la mathématique et de la géométrie.

Nous nous occuperons ici principalement de cet aspect de leur œuvre; il serait, en effet, trop long de se référer à l'importance et au poids de leur travail mathématique; l'entreprise demanderait en outre l'usage d'un langage technique et nous amènerait à nous arrêter à des aspects particuliers de la problématique mathématique, qui ne trouvent peut-être point leur place ici et en ce moment. D'autre part, l'attitude qu'ils eurent en face de la problématique des fondements, permet de cueillir des aspects de leur personnalité humaine et scientifique très intéressants, qu'il serait peut-être plus difficile de mettre en valeur au moyen d'une analyse technique des œuvres plus strictement mathématiques. En vérité, la façon avec laquelle ils abordaient la critique des fondements, donne prise à des réflexions qui peuvent paraître intéressantes et qui se relient à certaines analyses de la psychologie de la pensée et de la découverte mathématique qui sont classiques, mais qui mériteraient peut-être d'être approfondies ultérieurement, au moyen de méthodes modernes.

Il est naturel, dans cet ordre d'idées, de se référer à l'analyse perspicace que fit J. Hadamard de la psychologie de l'invention, dans le domaine de la mathématique; et avant Hadamard encore, il est à rappeler spontanément ce que H. Poincaré a exprimé dans la conférence qu'il tint lors du congrès mondial des mathématiciens qui eut lieu à Paris, en 1900; c'est à ce même congrès que D. Hilbert prononça la célèbre conférence, dans laquelle il se référait à l'état de la mathématique et en énonçait les principaux problèmes restés encore ouverts.

Poincaré disait:

> Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique; à lire leurs Ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre un place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.
> Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des *analystes* et si l'on appelle les autres *géomètres*, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la Géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'Analyse pure.
> C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau [1].

Nous nous rendons fort bien compte du fait qu'il est difficile de trouver les types, pour ainsi dire purs, de deux genres, et que chez bien des mathématiciens de grande envergure, les caractéristiques des deux genres se trouvent souvent mélangées, de sorte qu'un jugement définitif sur leur appartenance à l'un ou à l'autre type doit être tenu en suspens. Toutefois, dans le cas de F. Enriques, nous estimons qu'il est possible de dire que nous nous trouvons devant un modèle du géomètre pur. Nous pensons, en effet, que l'on peut appliquer à Enriques, avec raison, ce que Poincaré disait au sujet de V. Poncelet:

> Poncelet était l'un des esprits les plus intuitifs de ce siècle; il l'était avec passion, presque avec ostentation; il regardait le principe de continuité comme une de ses conceptions les plus hardies, et cependant ce principe ne reposait pas sur le témoignage des sens; c'était plutôt contredire ce témoignage que d'assimiler l'hyperbole à l'ellipse. Il n'y avait là qu'une sorte de généralisation hâtive et instinctive que je ne veux d'ailleurs pas défendre.

Nous avons dit que les paroles de Poincaré pouvaient très bien être appliquées à Enriques, car qui a eu la chance de connaître ce dernier, sait que lui aussi était intuitif "avec passion, presque avec ostentation".

Typique est l'anecdote rapportée par un élève, selon laquelle Enriques aurait déclaré de "voir" un certain théorème (dont l'élève doutait peut-être) avec la même évidence sensible par laquelle il voyait un petit chien qui était dans la rue à ce moment-là.

Au-delà de la vérification de la vérité objective de l'épisode, il est vrai que Enriques a apporté une attitude caractéristique dans la recherche, dans la didactique, dans l'analyse des fondements de la mathématique et de la géométrie. On pourrait dire qu'il se méfiait profondément de la rigueur formelle, et qu'il cherchait dans les théories la rigueur substancielle, rigueur qui, au moment de la recherche et de la construction de la théorie, fait aussi place à l'invention, à la fantaisie, à l'intuition du scientifique; et ici, avec le terme d'"intuition", on entend indiquer, entre autre, à part l'énorme expérience, la surprenante capacité de déduction immédiate et de critique, également la capacité de se servir du contenu de l'expérience sensible, transfiguré par la fantaisie. Sa façon de penser est énoncée également par le titre même du traité monumental, qu'il à écrit en collaboration avec son élève O. Chisini. Le titre est le suivant: *Théorie géométrique des équations et des fonctions algébriques*[2] ; et dans l'adjectif "géométrique" était indiquée l'intention explicite de donner à l'intuition, à l'imagination, la place qu'elles méritent dans la recherche mathématique. Cette intention est, du reste, soutenue dans la préface de l'œuvre dans laquelle on peut lire, à propos des critères selon lesquels le traité a été rédigé, et dans concepts de rigueur et de généralité:

> [...] il devient important d'exposer, à côté de la vérité, les voies – souvent différentes – qui y conduisent, sans exclure les procédés partiaux ou imparfaits de la comparaison des méthodes, mais plutôt avec l'intention précise de les corriger et de les clarifier l'un avec l'autre, faisant résulter ce qui est défectueux dans chaque conception partiale des théories.

Et plus bas:

> [...] le vrai sens de la connaissance générale se proportionne au détail significatif qui y est contenu. Ainsi à chaque problème revient, d'une façon ou d'une autre, un propre degré de généralité, qui est le premier degré dans lequel le problème même révèle sa vraie nature; et il importe que le savant apprenne à reconnaître comme potentiellement donnée en celà, la généralisation ultérieure.

Une personnalité, comme celle de Enriques, devait apporter à l'analyse des fondements de la géométrie, et de la mathématique en général, une attitude tout à fait originale; en effet, pour la mentalité de Enriques, le problème de donner un système complet et rigoureux d'axiomes de la géométrie, présente une importance relativement secondaire, face à celui d'analyser la genèse psychologique et historique des concepts de cette doctrine. Ainsi, il portait un intérêt tout particulier au développement de l'histoire de la science, présenté à travers la science elle-même, tel qu'on le trouve écrit dans la préface du traité déjà cité; on y lit:

> [...] l'histoire ici est obtenue à travers la science, au service de la science, et non vice versa [...]

et un peu plus loin:

> [...] l'époque où les hommes de sciences cachaient les traces de leur propre chemin, est désormais dépassée; notre génération considère, à juste titre, comme un devoir de rendre clair, dans chaque œuvre scientifique, le système des idées constructrices.

A la suite de ces conceptions, nous trouvons les idées que Enriques a exposées à propos de l'erreur dans les mathématiques, mettant en évidence sa fécondité et sa fonction de stimulant, et prévenant ainsi une attitude qui sera adoptée par K. Popper ensuite, à propos de l'erreur dans la science. Il faut ajouter que Enriques n'a nullement ignoré la problématique logique qui est à la base des recherches sur les fondements; en outre, la problématique qui conduit à assurer l'indépendance et la compatibilité des divers systèmes de postulats. Mais il a préféré approfondir la recherche de l'évolution historique des problèmes et analyser la pensée des grands de l'Antiquité et des classiques de la science, de façon à comprendre leur soif de connaître le "dessous" des choses, ce qui résiste aux changements des apparences et qui en fonde la "cognoscibilité". Nous pourrions donc dire que Enriques était profondément attiré, non point tellement par le problème de préciser les lois logiques fondamentales et d'analyser leur portée, mais plutôt par le problème de l'origine de ces lois et de la signification qu'elles ont toujours eue pour l'homme. Il ramène l'origine du rationalisme à la recherche de "ce qui se cache réellement sous les choses"; et en cela, on dirait qu'il incarne le jugement que Poincaré a donné de Poncelet: parce que parfois le raisonnement nous donne quelque-chose qui contredit les apparences sensibles, comme le principe de continuité conduisait Poncelet à mettre dans la même classe l'élipse et l'hyperbole, contre toute apparence. Et justement, la raison est la force qui nous aide à voir dedans, à voir dessous; de la même façon qu'un raisonnement, tel que celui qui mène au théorème de Pythagore, affirme l'inexistence d'un "atome" d'espace géométrique, contre toute évidence expérimentale et en-dehors de toute expérience possible. Mais la logique est seulement un des instruments de la raison, instrument qui se présente, durant l'évolution de l'histoire, sous divers aspects et avec des lois formelles différentes, mais qui n'est pas unique, parce que même l'intuition a une valeur et une portée qui lui sont propres; et dans cette perspective, on comprend comment la rigueur logique formelle puisse passer en seconde ligne, face à l'évidence et à l'importance des contenus des énoncés de la science.

Une personnalité aussi brillante et douée d'une intuition géométrique si fulgurante comme celle de Enriques, n'était peut-être point faite pour comprendre plenement la signification et l'importance des études sur les fondements de la mathématique et de la logique que ses contemporains développaient avec d'autres moyens et dans d'autres directions. Nous nous limiterons ici à rappeler le fait qu'en Italie aussi, l'école de pensée qui s'inspirait d'un autre grand mathématicien, Giuseppe Peano, approfondissait et développait les analyses sur les fondements de la mathématique et de la logique. Comme on le sait, de telles études étaient menées dans la direction de la recherche d'une rigueur formelle maximale, et exposées avec l'emploi du symbolisme logique, dont Peano fut un des fondateurs et un des défenseurs. Mais, nous le répétons, ils n'avaient pas un caractère qui leur permettait d'être appréciés par Enriques; ce qui démontre peut-être que les voies de la science et de la découverte peuvent être parcourues de manières différentes et avec des attitudes diverses, sans que d'autre part, l'extrême envergure de certains grands porte ombrage à celle des autres. Il faut dire aussi que pas même la mentalité de Peano, dans laquelle il nous plairait d'identifier l'analyste pur de Poincaré, n'était faite pour comprendre la valeur de Enriques; et que, du reste, Peano et son école ne démontrèrent même pas d'apprécier grandement les études et les idées que D. Hilbert dédiait aux fondements de la géométrie.

3. Si l'on voulait garder les schémas de jugement, auxquels nous avons été induits par la pensée de Poincaré, la tentation de compter D. Hilbert dans la catégorie des analystes serait forte; cela serait justifié par l'importante masse de ses travaux d'algèbre et d'analyse mathématique; et des raisons encore plus fortes en faveur de cette conclusion, pourraient se trouver dans son attitude face à la logique: la création et le développement d'un calcul des propositions, l'analyse du raisonnement mathématique qui le portèrent à l'énonciation des points fondamentaux de la *Beweistheorie*, dénoncent une manière typique de procéder, qui – toujours selon la terminologie de Poincaré – est digne d'un Vauban.

Mais, à notre avis, cette thèse reste en discussion malgré le nombre et la validité des arguments qui peuvent être portés en sa faveur, et auxquels nous avons brièvement fait allusion; nous estimons cela, en prenant en considération l'ensemble de l'œuvre de Hilbert, et en particulier en rappelant plusieurs déclarations faites par lui-même, au cours de la conférence de Paris, que nous avons déjà citée, et la structure de ses *Grundlagen der Geometrie*.

Il nous plaît de rappeler ici un passage de la conférence susmentionnée, dans laquelle Hilbert parle d'un problème dont nous avons déjà parlé et qui est discuté du reste même aujourd'hui avec des attitudes différentes: le problème de la rigueur en mathématique. Hilbert critique la conception de la rigueur abstraite et formelle, qui trouvait en ce temps-là, tant de défenseures acharnés et d'adeptes. Il dit à ce sujet:

> [...] une conception si restreinte de la rigueur nous conduirait en effet à ignorer toutes les idées qui ont été tirées de la géométrie, de la mécanique, de la physique; une conception ainsi faite, bloquerait la voie à tout ce qui nous vient du monde extérieur, et, comme dernière conséquence, nous emmènerait à repousser le concept de continuité et de nombre irrationel. Quelle source nous extirperions de la mathématique

> si nous supprimions la géométrie et la physique mathématique!
> Bien au contraire, je pense que où des idées mathématiques se présentent, que ce soit en philosophie (théorie de la connaissance), soit en géométrie, soit en physique, le problème de la discussion des principes fondamentaux se pose, principes qui sont à la base de ces idées, et de l'énonciation d'un système complet et simple d'axiomes; et cela doit être fait de façon que la rigueur des définitions neuves et de leur possibilité d'applications ne la cède en rien aux antiques définitions[3].

Le fait qu'Hilbert considère l'expérience et l'imagination, non seulement comme des réservoires des problèmes de la mathématique rigoureuse, mais aussi comme des instruments essentiels pour la construction de l'édifice de chaque théorie mathématique, est ultérieurement prouvé par les passage suivants, qui peuvent être considérés surprenants, parce que prononcés par un mathématicien auquel on doit – comme nous l'avons dit – un système de calcul logique:

> [...] les signes et les symboles de l'arithmétique sont des figures écrites, ainsi que les figures de la géométrie sont des formules dessinées; aucun mathématicien ne pouvait se passer de ces formules dessinées, ainsi qu'il ne pouvait se passer, dans les calculs, des parenthèses ou d'autres symboles [...].

Naturellement, il ajoute:

> [...] l'emploi des symboles géométriques comme méthode rigoureuse de démonstration, présuppose la connaissance exacte des axiomes qui se trouvent à la base de ces figures, et la complète domination de ces axiomes; une discussion axiomatique rigoureuse du contenu des figures géométriques est donc nécessaire, pour que celles-ci puissent être incorporées dans le patrimoine général des symboles mathématiques [...]

Les idées de grande perspicacité et de profond équilibre qu'inspirent ces passages (ainsi que d'autres qu'on pourrait citer) se trouvent aussi à la base des *Grundlagen der Geometrie*; cette œuvre fondamentale se présente à nous comme la réalisation d'un programme profondément médité et étudié pour tenir compte de tous les apports d'une critique désormais presque séculaire, mais aussi, en même temps, pour ne rien laisser tomber de la puissance de l'immagination, qui nous fournit les données fondamentales de la géométrie, en partant – comme nous l'avons dit – de l'idéalisation de nos expériences concrêtes.

Dans cette œuvre de Hilbert, les axiomes de la géométrie sont présentés dans une succession qui apparaît soigneusement étudiée; telle succession est probablement inspirée aussi par l'analyse de la psychologie de la perception, de la genèse des idées géométriques, analyses que du reste, même Enriques rappelle dans plusieurs passages de son œuvre. Selon de telles analyses, les idées qui sont à la base de la géométrie projective (géométrie de position, selon la terminologie de K.K. von Staudt) trouvent leur origine dans les sensations de caractère presque exclusivement visuel; par contre, les idées qui sont à la base de la géométrie élémentaire (métrique) ont leur origine dans des groupes de sensations plus complexes et composites. Il en suit qu'on pourrait faire, avec ces critères, une espèce de graduation de complexité des idées géométriques, graduation qui, partant d'idées qui se basent sur des sensations relativement simples et élémentaires, remonte à des idées qui tirent leur origine dans des sensations plus complexes et moins univoques; eh bien, cette graduation peut être retrouvée dans les différents groupes d'axiomes, dans lesquels s'articule la manière de traîter les *Grundlagen*; et on trouve la même graduation dans la "complication" relative des champs numériques dont Hilbert se sert, petit à petit, pour constater l'indépendance et la cohérence des différents groupes d'axiomes. Finalement le sens et la portée des différentes géométries-non (non desarguésienne, non pascalienne etc.) sont illustrés avec les propriétés formelles des calculs correspondant à celles-ci.

Nous pensons donc qu'il est juste de considérer les *Grundlagen* comme un exemple du fait que, dans la recherche comme dans la didactique, les exigences de la rigueur logique ne doivent pas nécessairement sacrifier l'imagination et la fantaisie; et que, au contraire, les facultés de l'esprit humain constituent un patrimoine précieux, même pour le scientifique qui se dédie aux études les plus abstraites et les plus rigoureuses.

4. Il nous plaît de conclure les considérations brèves et sommaires au sujet de deux grands mathématiciens tellement affins, mais aussi tellement divers entre eux, relevant une caractéristique

humaine qui est commune à tous les deux: l'enthousiasme pour la recherche et la découverte, la foi inébranlable dans l'intelligence et la raison humaines. Enriques proclamait ces sentiments dans une période de sa vie particulièrement douloureuse pour lui, qui aurait peut-être justifié une vision bien plus triste du monde et de la condition humaine; et il les manifestait dans cet article sur l'erreur dans les mathématiques, dont nous avons déjà parlé et qu'il ne put signer avec son propre nom, parce qu'une loi d'alors l'en empêchait.

Pour ce qui concerne Hilbert, la même foi inébranlable est manifestée lapidairement par les paroles écrites sur sa tombe:

> Wir müssen wissen
> Wir werden wissen.

Institut de Géométrie
Université de Milan

NOTES

1. Poincaré, H. *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques,* Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1902, pp. 121 ss.
2. Enriques, F. e Chisini, O. *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* Bologna, 1924.
3. Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie,* 7ème éd., Leipzig, 1930.

EPISTEMOLOGIA
Rivista italiana di Filosofia della Scienza
An Italian Journal for the Philosophy of Science

Via Assarotti 52 - 16122 Genova (Italy)